



Torino, 05.03.2018



Matematica ed Economia

Paola Carante

Marco Novarese



ESEMPI DI ATTIVITA' (situazioni-problema)

(1) In quale paese si vive meglio?

(2) Discutere di curve e di equilibrio

I biennio

(3) A spasso tra funzioni e costi

(4) Come variano i costi al crescere della produzione quando abbiamo un fattore di produzione fisso?

II biennio

(5) L'intreccio tra derivate ed elasticità

V anno

Nessun prerequisito di economia

→ applicabilità nei diversi indirizzi di scuola secondaria

OBIETTIVI



Sviluppare competenze di cittadinanza e senso di consapevolezza economica negli studenti, in qualità di “futuri cittadini del mondo”

- ◆ **Individuare strategie per la risoluzione di un problema tratto da un contesto reale**
- ◆ **Sviluppare ragionamenti logico/matematici in un contesto economico/reale**
- ◆ **Rispondere in modo pertinente alle domande, motivando con coerenza le scelte**
- ◆ **Interpretare o costruire modelli opportuni per una situazione descritta**
- ◆ **Usare consapevolmente notazioni diverse da quelle tradizionali**
- ◆ **Operare con nuove grandezze**
- ◆ **Leggere e interpretare rappresentazioni grafiche**

ATTIVITA' 1: In quale paese si vive meglio?

Tematiche affrontate

Aritmetica: numeri,
rapporti tra numeri,
percentuali e
approssimazioni

Indice dei prezzi,
inflazione,
potere d'acquisto,
paniere

Riferimenti istituzionali

- 1) Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali
- 2) Indicazioni Nazionali per i licei

Obiettivi formativi per matematica

I BIENNIO – Aritmetica e algebra

Livello scolastico suggerito: classe 1^a

Nel paese dei meccanici il salario è di 1040 €.

Nel paese dei marinai il salario è di 1200 €.

Nel 2010 il prezzo per acquistare una certa quantità di un prodotto - una confezione di bevande - era di 10 € in entrambi i paesi.

Con queste informazioni, in quale paese si potrebbe dire “star meglio” da un punto di vista economico? Perché?



Nota: “star meglio” dal punto di vista economico significa poter consumare di più.

Nel paese dei meccanici il salario è di 1040 €.

Nel paese dei marinai il salario è di 1200 €.

Nel 2010 il prezzo per acquistare una certa quantità di un prodotto - una confezione di bevande - era di

10 €. Si tenga ora conto dell'inflazione che affligge i due paesi.

Nel corso degli anni, dal 2010 al 2017, i salari sono rimasti invariati, mentre il prezzo per acquistare una confezione di bevande è aumentato ogni anno dell'1% nel paese dei meccanici e del 10% nel paese dei marinai.

In quale paese si potrebbe dire “star meglio” da un punto di vista economico nel 2017? Perché?

Nota: “star meglio” dal punto di vista economico significa poter consumare di più.

Con “inflazione” si intende un aumento generalizzato dei prezzi o di un prezzo (in questo caso delle bevande).

PERCORSO GUIDATO

Di quanto aumenta il prezzo di una confezione di bevande di anno in anno nei due paesi?

Per rispondere, completare la seguente tabella (approssimazioni al centesimo):

	Prezzo in euro per comprare una confezione di bevande							
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Paese dei meccanici								
Paese dei marinai								



PERCORSO GUIDATO

Di quanto aumenta il prezzo di una confezione di bevande di anno in anno nei due paesi?

Per rispondere, completare la seguente tabella (approssimazioni al centesimo):

	Prezzo in euro per comprare una confezione di bevande							
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Paese dei meccanici	10,00	10,10	10,20	10,30	10,40	10,50	10,61	10,72
Paese dei marinai	10,00	11,00	12,10	13,31	14,64	16,10	17,71	19,48

Quante confezioni di bevande si riescono ad acquistare nei due paesi all'aumentare dei prezzi nel corso degli anni e mantenendo invariati i salari?

Per rispondere, completare la seguente tabella (approssimazioni al centesimo):

	Quantità di prodotto acquistabile							
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Paese dei meccanici								
Paese dei marinai								

CONCLUSIONE: _____

Quante confezioni di bevande si riescono ad acquistare nei due paesi all'aumentare dei prezzi nel corso degli anni e mantenendo invariati i salari?

Per rispondere, completare la seguente tabella (approssimazioni al centesimo):

	Quantità di prodotto acquistabile							
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Paese dei meccanici	104	102,97	101,96	100,97	100,00	99,05	98,02	97,02
Paese dei marinai	120	109,09	99,17	90,17	81,97	74,53	67,76	61,60

CONCLUSIONE: _____

Quante confezioni di bevande si riescono ad acquistare nei due paesi all'aumentare dei prezzi nel corso degli anni e mantenendo invariati i salari?

Per rispondere, completare la seguente tabella (approssimazioni al centesimo):

	Quantità di prodotto acquistabile							
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Paese dei meccanici	104	102,97	101,96	100,97	100,00	99,05	98,02	97,02
Paese dei marinai	120	109,09	99,17	90,17	81,97	77,76	77,76	61,60



CONCLUSIONE: _____

DOMANDE AGGIUNTIVE E APPROFONDIMENTI

- Immaginiamo che il prodotto o il paniere non sia deperibile e quindi sia possibile acquistare più prodotti; dove ha più senso farlo, nel paese dei meccanici o nel paese dei marinai?
- Come si fa a fare in modo che in un paese caratterizzato da inflazione le persone possano acquistare sempre lo stesso quantitativo di merendine?



**LABORATORIO
CON FOGLIO DI
CALCOLO**

**ATTIVITA' DI
RACCOLTA E
ANALISI DATI**

**COSA TI FA
"STAR BENE"?**

ATTIVITA' 2: Discutere di curve e di equilibrio

Tematiche affrontate

**Relazioni e funzioni:
funzioni lineari, loro
rappresentazione simbolica
e grafica, sistemi
(2 equazioni, 2 incognite)**

**Curva di domanda,
curva di offerta,
prezzo di equilibrio
del mercato**

Riferimenti istituzionali

- 1) Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali**
- 2) Indicazioni Nazionali per i licei**

Obiettivi formativi per matematica

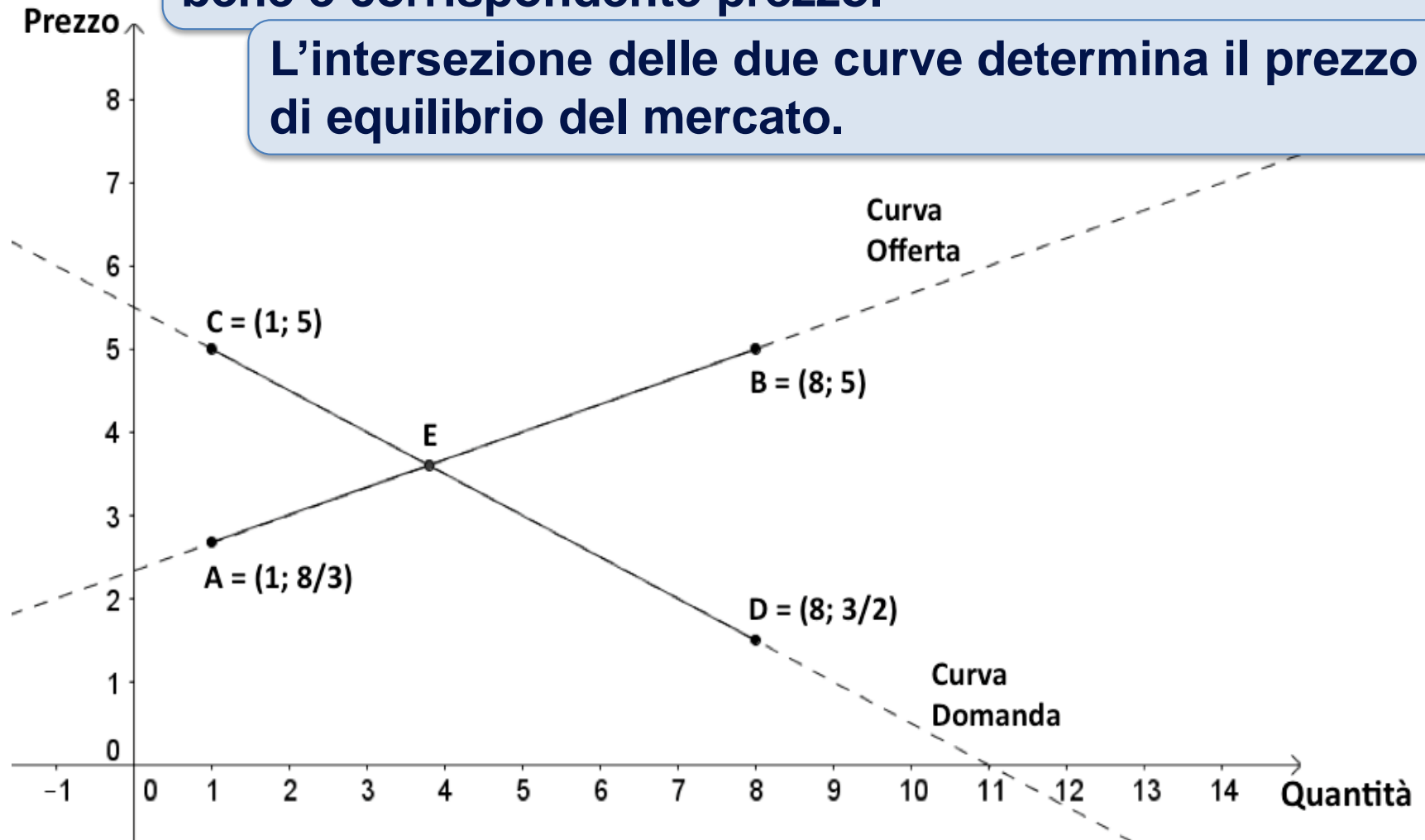
I BIENNIO – Relazioni e funzioni

Livello scolastico suggerito: classe 2^a

Il grafico rappresenta due curve nel piano cartesiano: la curva di domanda e la curva di offerta.

Entrambe esprimono una relazione tra quantità di un bene e corrispondente prezzo.

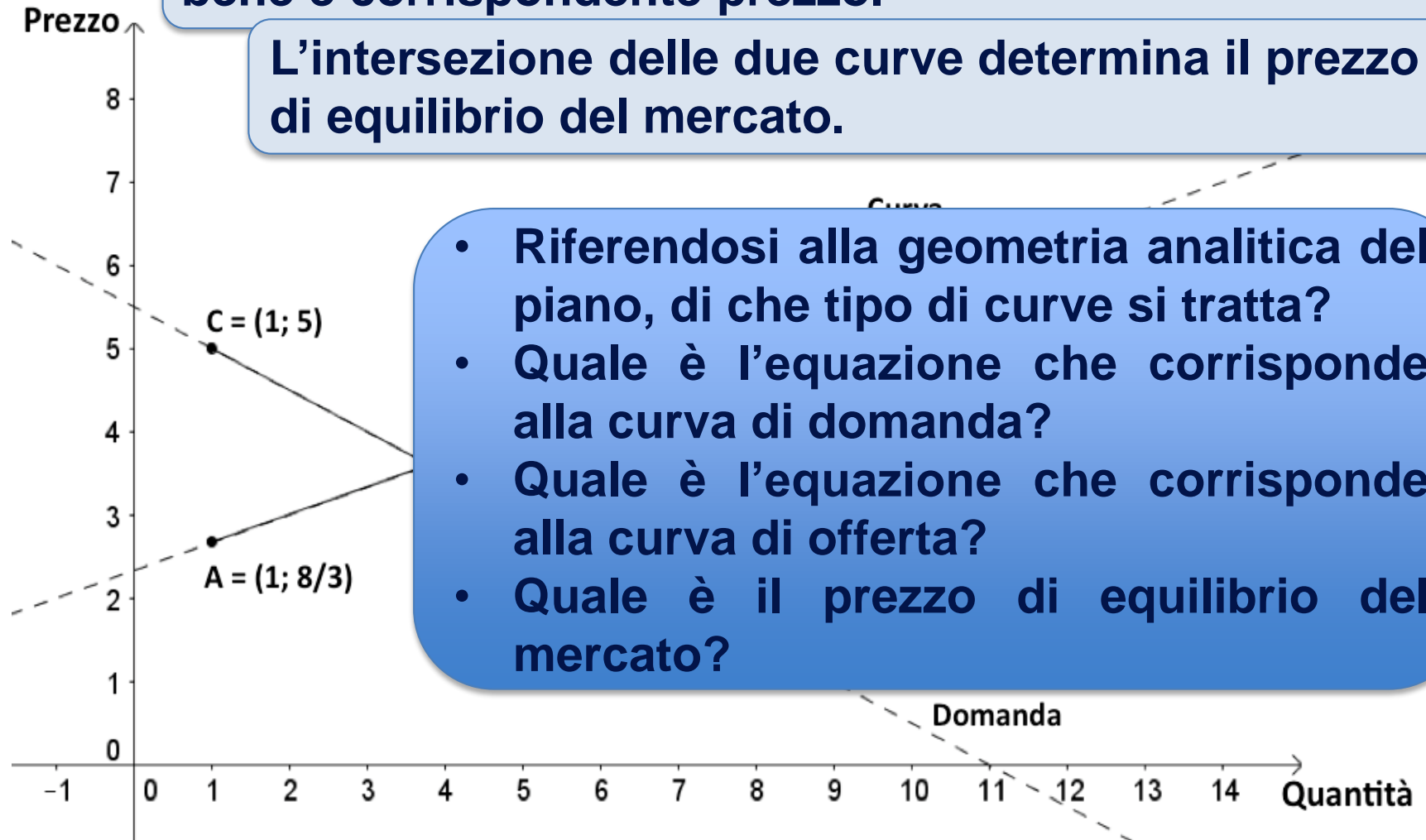
L'intersezione delle due curve determina il prezzo di equilibrio del mercato.



Il grafico rappresenta due curve nel piano cartesiano: la curva di domanda e la curva di offerta.

Entrambe esprimono una relazione tra quantità di un bene e corrispondente prezzo.

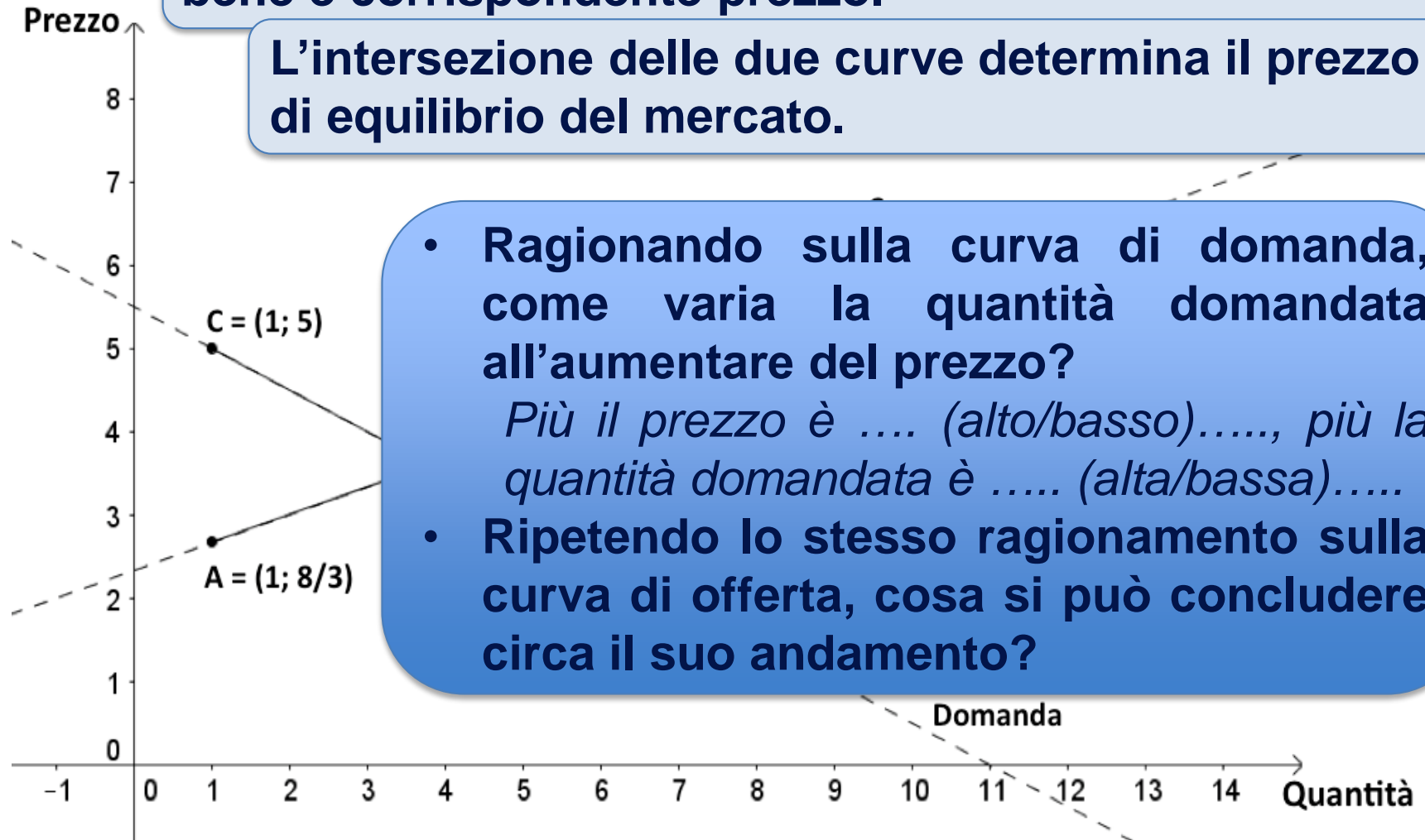
L'intersezione delle due curve determina il prezzo di equilibrio del mercato.



Il grafico rappresenta due curve nel piano cartesiano: la curva di domanda e la curva di offerta.

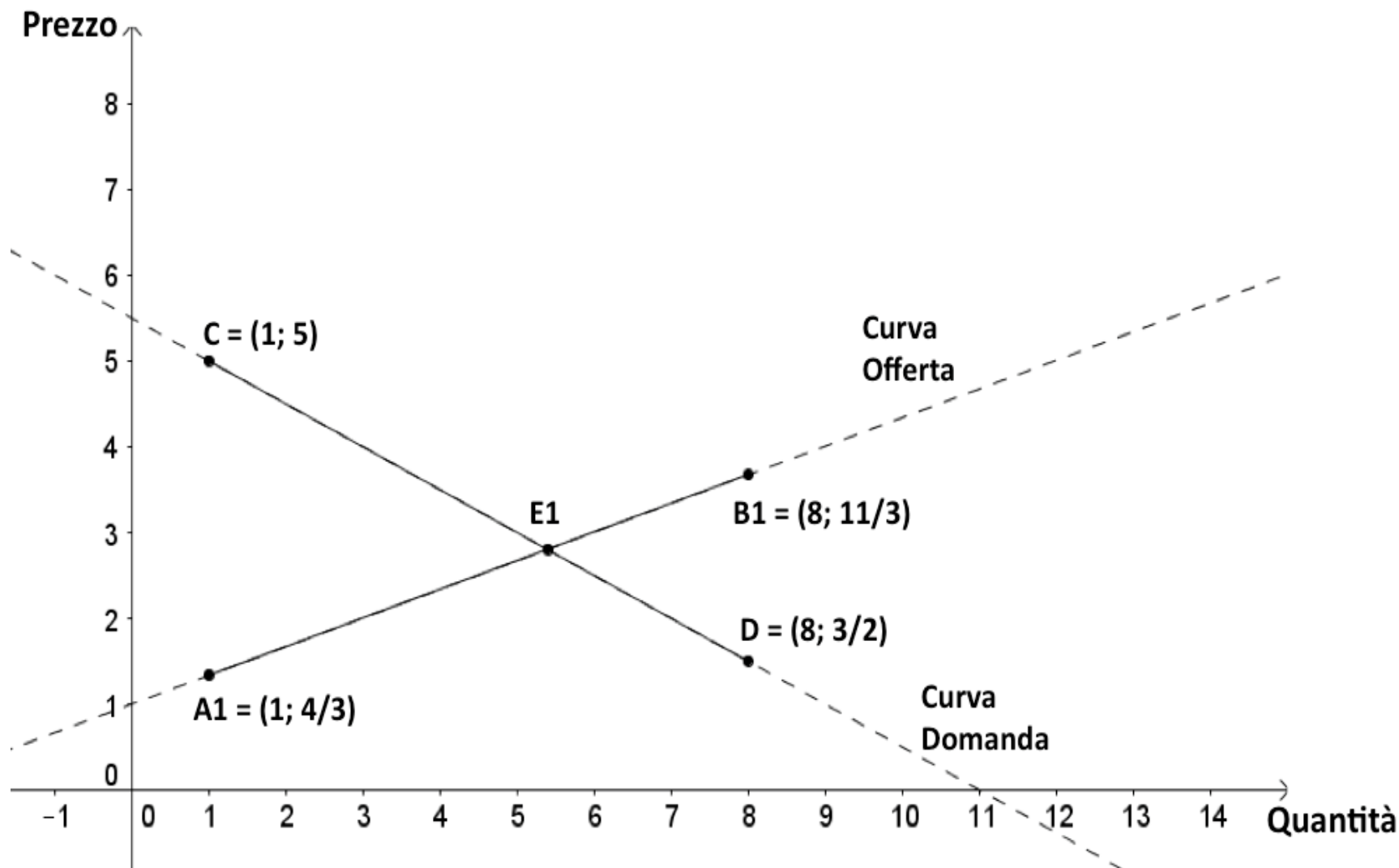
Entrambe esprimono una relazione tra quantità di un bene e corrispondente prezzo.

L'intersezione delle due curve determina il prezzo di equilibrio del mercato.

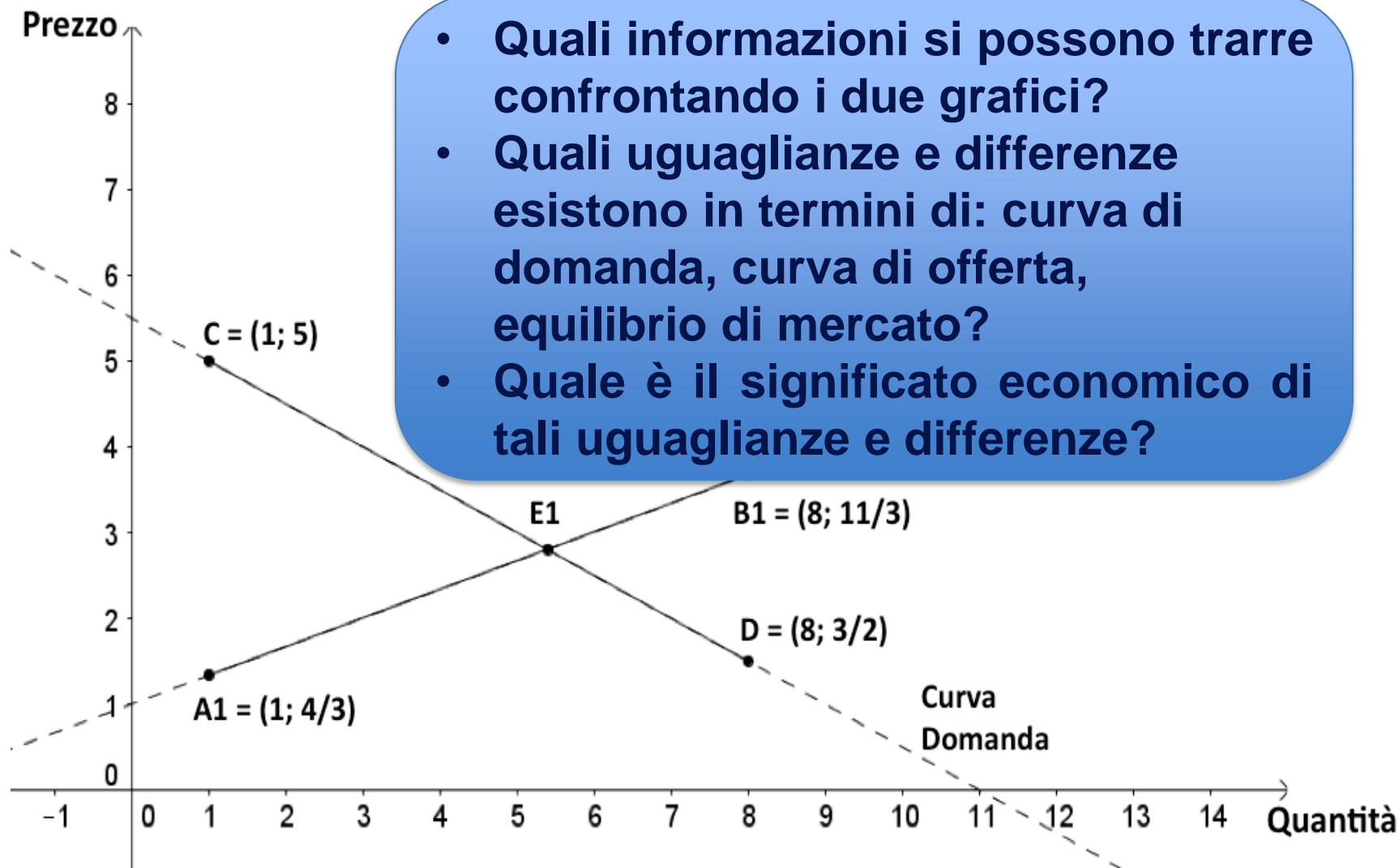


- **Ragionando sulla curva di domanda, come varia la quantità domandata all'aumentare del prezzo?**
Più il prezzo è (alto/basso)....., più la quantità domandata è (alta/bassa).....
- **Ripetendo lo stesso ragionamento sulla curva di offerta, cosa si può concludere circa il suo andamento?**

Il seguente grafico rappresenta una diversa situazione di mercato:



Il seguente grafico rappresenta una diversa situazione di mercato:



OSSERVAZIONI

L'attività riguarda un **argomento tradizionale** che è quello delle rette nel piano cartesiano. L'innovazione consiste nel presentare l'argomento matematico **in un contesto reale di tipo economico**. In particolare, si parla di curve di domanda e di offerta e di equilibrio di mercato, concetti chiave in economia che si prestano per interessanti applicazioni nell'insegnamento-apprendimento della matematica.

Linee Guida
Abilità
I BIENNIO

Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria

ATTIVITA' DI LABORATORIO

Riprodurre e studiare varie situazioni di mercato con



- 1) Rappresentare la retta corrispondente alla curva di domanda
- 2) Definire un parametro variabile (*slider*) per rappresentare la curva di offerta
- 3) Analizzare le trasformazioni che producono nuove situazioni di equilibrio di mercato

Attività a piccoli gruppi

http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/allineamenti-esploriamo-le-funzioni-lineari/

ATTIVITA' 3: A spasso tra funzioni e costi

Tematiche affrontate

Relazioni e funzioni:
funzioni costanti,
funzioni crescenti,
somma di funzioni,
modelli

**Costi fissi,
costi variabili,
loro andamento in
funzione della
quantità di prodotto**

Riferimenti istituzionali

- 1) Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali**
- 2) Indicazioni Nazionali per i licei**

Livello scolastico suggerito:

II BIENNIO – scuola secondaria di secondo grado

Si vogliono analizzare i costi e le quantità di prodotto di un'azienda che produce vasetti di verdura.

L'azienda ha dei *costi fissi* che non variano al variare della quantità di vasetti prodotti e sono dovuti alle spese per il funzionamento degli impianti.

L'azienda ha anche dei *costi variabili* che dipendono dalla quantità di vasetti di verdura prodotti: più la produzione è limitata, più il costo è contenuto, mentre all'aumentare della produzione aumentano anche i costi per l'azienda (ad esempio dovuti all'acquisto delle materie prime, come le verdure).

In totale, i costi dell'azienda produttrice di vasetti di verdura sono dati dalla somma di costi fissi e costi variabili.

Si vogliono analizzare i costi di un'azienda.

L'azienda ha due tipi di costi: costi fissi e costi variabili.

1) Come si possono rappresentare graficamente i costi fissi?

2) Come si possono rappresentare graficamente i costi variabili?

3) Come si possono rappresentare graficamente i costi totali dell'azienda?

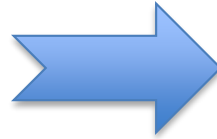
La funzione di costo totale dell'azienda è la somma dei costi fissi e dei costi variabili. I costi fissi sono costanti, mentre i costi variabili variano al variare della quantità di prodotto prodotta. I costi totali variano al variare della quantità di prodotto prodotta.

Il grafico dei costi fissi è una retta orizzontale. Il grafico dei costi variabili è una retta che parte dall'origine e ha una pendenza costante. Il grafico dei costi totali è una retta che parte dall'intercetta dei costi fissi e ha la stessa pendenza dei costi variabili.

Associare ad ogni grafico l'espressione simbolica della funzione rappresentata.

ANALISI A PRIORI E RISPOSTE ATTESE

Situazione economica
descritta in linguaggio
verbale



Modellizzazione prima
in registro grafico e poi
simbolico

TRE FUNZIONI, dove le variabili sono i costi (ordinate) e la quantità prodotta (ascisse):

- 1) una **funzione costante** per i costi fissi, al variare della quantità prodotta (retta parallela all'asse delle ascisse, del tipo $y = k$)
- 2) una **funzione crescente** per i costi variabili, che aumentano all'aumentare della quantità prodotta (qualsiasi funzione crescente $f(x)$)
- 3) una **funzione somma** delle due precedenti (traslazione verticale, del tipo $f(x) + k$)

ATTIVITA' DI SIMULAZIONE/GIOCO DI RUOLO

Metodologia di lavoro: attività a piccoli gruppi

Gli studenti ricoprono il ruolo di gestori dei costi di un ristorante: devono creare tabelle di valori realistici, in cui far figurare tutti gli ipotizzati costi fissi per la gestione del ristorante e alcuni dei costi variabili.



L'idea di non fornire dati, ma di lasciare agli studenti la libertà di formulare ipotesi sui valori credibili dei costi fissi e variabili mira a sviluppare un senso di consapevolezza economica.

Link utili:

<https://www.slideshare.net/stefano.azzini/i-costi-nella-ristorazione>

<http://aquachiara.it/blog/gestione-dei-costi-nella-ristorazione/>

ATTIVITA' 4: Come variano i costi al crescere della produzione quando abbiamo un fattore produttivo fisso?

Tematiche affrontate

**Stesse tematiche
dell'attività 3:
relazioni e funzioni
modelli**

**Stesse tematiche
dell'attività 3:
costi fissi e variabili
➤ Produttività dei
lavoratori**

Riferimenti istituzionali

- 1) Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali**
- 2) Indicazioni Nazionali per i licei**

Livello scolastico suggerito:

II BIENNIO – scuola secondaria di secondo grado

ATTIVITA' 4: Come variano i costi al crescere della produzione quando abbiamo un fattore produttivo fisso?

Tematiche affrontate

Stesse tematiche
dell'attività 3:
relazioni e funzioni
modelli

Stesse tematiche
dell'attività 3:
costi fissi e variabili
➤ Produttività dei
lavoratori

*Utilizzare le strategie
del pensiero razionale
per affrontare situazioni
problematiche,
elaborando opportune
soluzioni*

1) L... professionali

2) Ind...

suggerito:

II BIENNIO – scuola secondaria di secondo grado

Si immagini che la produzione consista nello scrivere lettere alla lavagna. Il gesso si trova sulla cattedra in un contenitore e prima di scrivere ogni lettera deve essere riposto nella scatola. Viene creata una squadra che ha a disposizione un gessetto (composta ad esempio da due studenti in qualità di lavoratori).

❖ Come varia la produzione al crescere dei lavoratori della squadra?

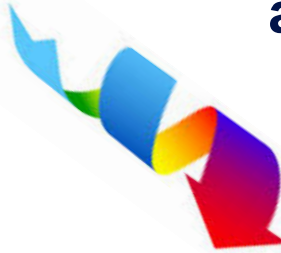
Si immagini che ogni lavoratore della squadra debba essere pagato con un compenso sempre fisso e costante (5 euro).

❖ Come varia il costo di produzione al crescere del numero di lavoratori?

Si tenga conto che ogni gesso costa 4 euro e che la lavagna costa 10 euro.

COMMENTO SULL'ATTIVITA' PROPOSTA

Primo ragionamento intuitivo: la produzione aumenta all'aumentare dei lavoratori



Analisi più accurata tra logica, matematica ed economia

Un lavoratore solo deve ogni volta tornare alla cattedra a posare il gesso. Due lavoratori possono organizzarsi il lavoro accelerando i tempi (uno scrive, l'altro posa e prende il gesso). Quando aumentano i lavoratori, però, la produzione non aumenta più molto (ad un certo punto i nuovi lavoratori non sanno cosa fare e magari intralciano gli altri). I costi però crescono proporzionalmente al numero di lavoratori e quindi il costo medio aumenta.

COMMENTO SULL'ATTIVITA' PROPOSTA

Primo ragionamento intuitivo: la produzione aumenta all'aumentare dei lavoratori



Analisi più accurata tra logica, matematica ed economia

CONCLUSIONE

Un lavoratore... alla cattedra a
posare il...
lavoro...
prende il ge...
produzione...
nuovi lavoratori...
gli altri). I costi per...
numero di lavoratori e...
quando ci sono fattori fissi, far crescere la produzione è complicato e costoso, se non impossibile. I nuovi lavoratori rendono sempre meno. I nuovi lavoratori intralciano gli altri). I costi per crescere proporzionalmente al numero di lavoratori e quindi il costo medio aumenta.

ATTIVITA' 5: L'intreccio tra derivate ed elasticità

Tematiche affrontate

**Relazioni e funzioni:
grafici, derivata di una
funzione in un punto**

**Elasticità della
domanda al prezzo:
definizione, calcolo,
interpretazione
grafica**

Riferimenti istituzionali

- 1) Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali**
- 2) Indicazioni Nazionali per i licei**

**Livello scolastico suggerito:
V ANNO – scuola secondaria di secondo grado**

ATTIVITA' 5: L'intreccio tra derivate ed elasticità

Tematiche affrontate

Relazioni e funzioni:
grafici, derivata di una
funzione in un punto

Elasticità della
domanda al prezzo:
definizione, calcolo,
interpretazione
grafica

Comprendere il ruolo
del calcolo
infinitesimale nella
modellizzazione di
fenomeni fisici o di altra
natura (delle scienze
economiche e sociali)

1)
2)

ionali

ci e professionali

so suggerito:

V ANNO – scuola secondaria di secondo grado

Immagina di vestire i panni di un famoso economista che si occupa dell'analisi del funzionamento dei mercati. Il principale obiettivo del tuo lavoro si focalizza sullo studio e sul calcolo dell'elasticità della domanda al prezzo.

Quello che ti serve sapere è che l'elasticità della domanda al prezzo è definita con il seguente rapporto:

$$E = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}{\frac{P_2 - P_1}{P_1}}$$

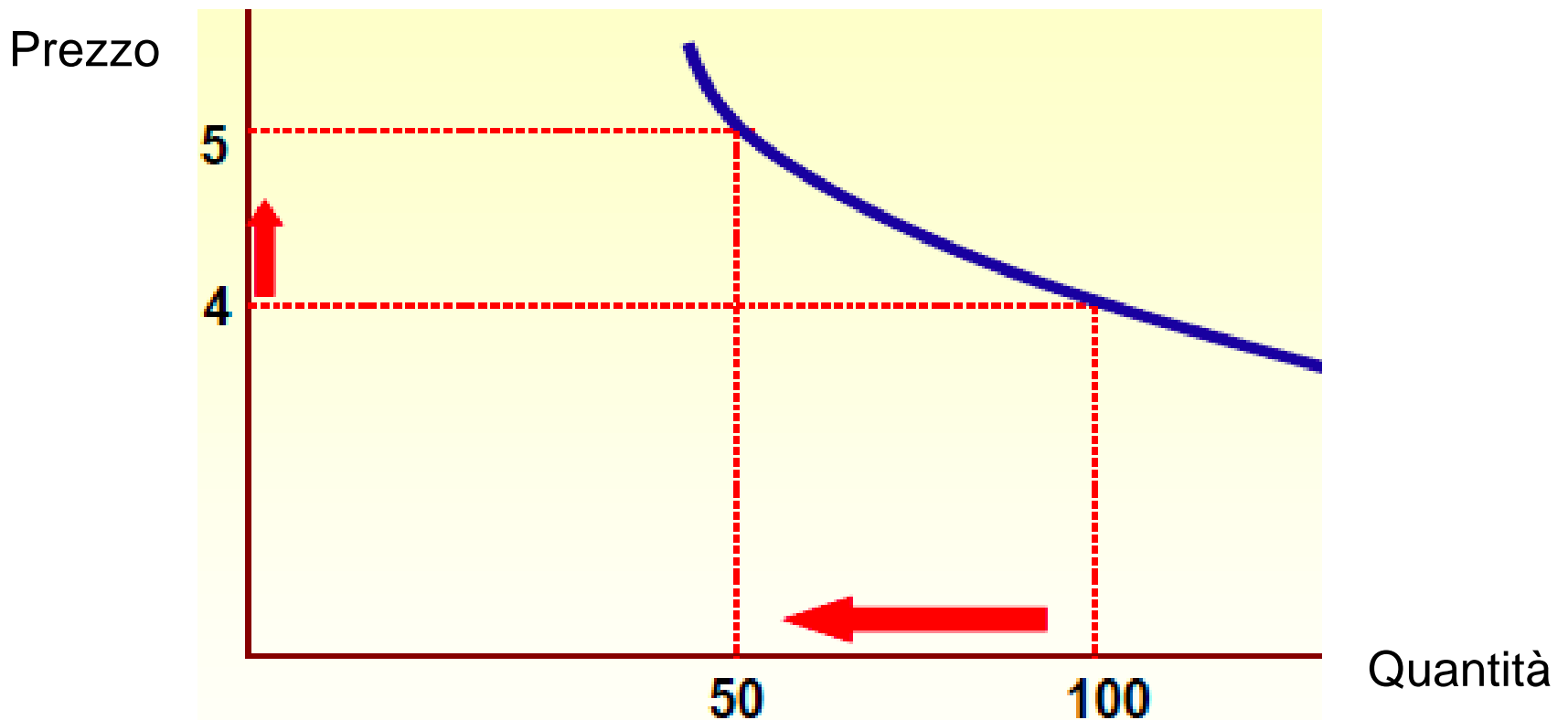
E elasticità

Q quantità di merce domandata

P corrispondente prezzo

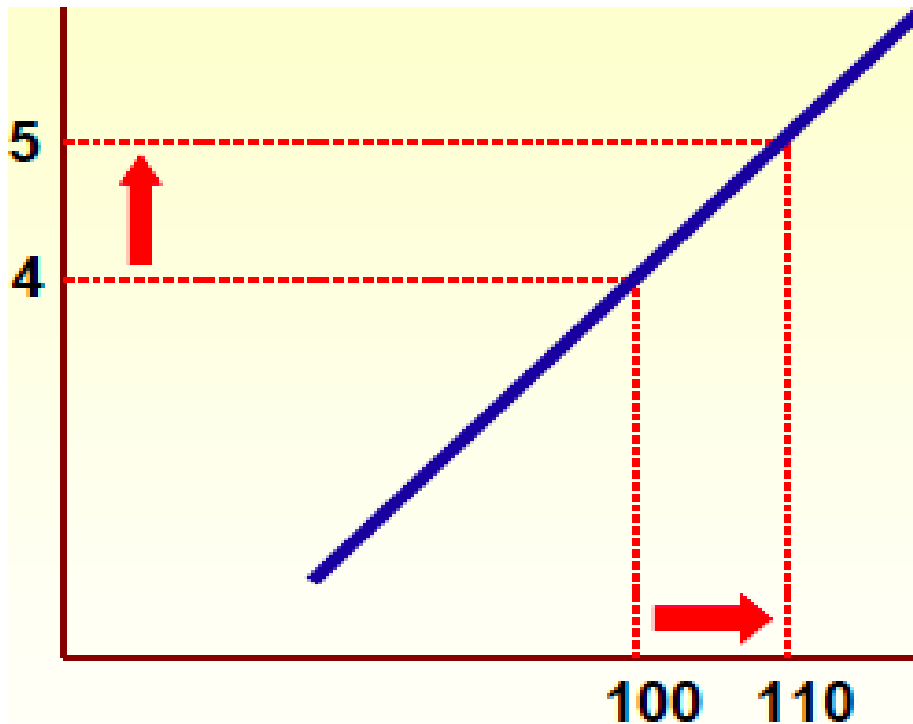
Quando $|E| > 1$ la domanda si dice elastica; mentre quando $|E| < 1$ la domanda si dice anelastica.

a) Calcolare l'elasticità della domanda al prezzo nelle situazioni di mercato rappresentate nei seguenti grafici e dire se si tratta di domanda elastica o anelastica, dandone una corretta interpretazione in termini economici.



a) Calcolare l'elasticità della domanda al prezzo nelle situazioni di mercato rappresentate nei seguenti grafici e dire se si tratta di domanda elastica o anelastica, dandone una corretta interpretazione in termini economici.

Prezzo



Quantità

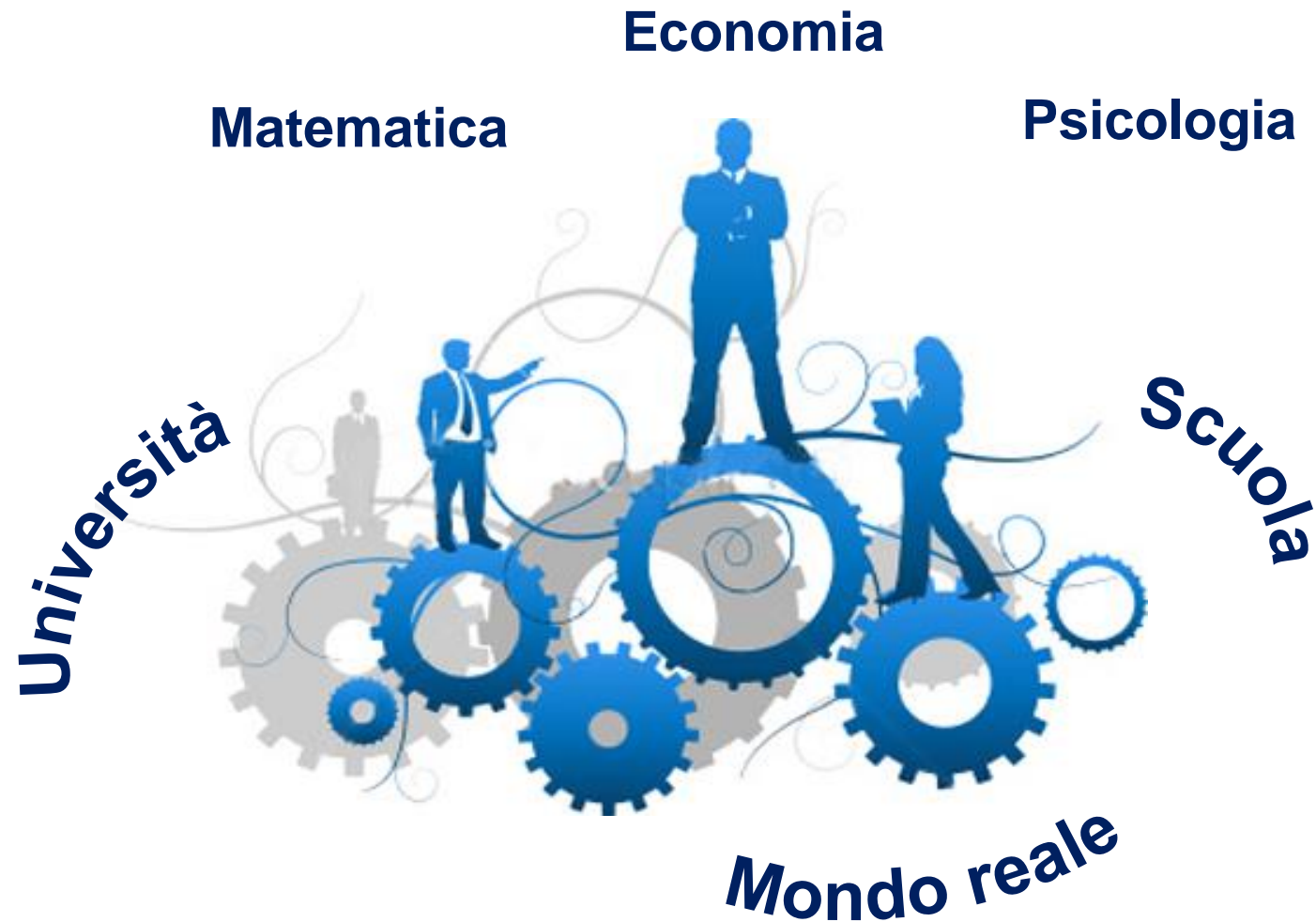
b) Mettere in relazione l'elasticità con l'inclinazione della curva. Esiste un legame tra elasticità e derivata della funzione in un punto? In caso affermativo, quale?

$$E = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}{\frac{P_2 - P_1}{P_1}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{P'(Q)} \cdot \frac{P_1}{Q_1}$$

c) Sapendo che il ricavo è definito come prodotto di P e Q (e quindi varia in funzione di queste due grandezze), quando secondo te conviene aumentare il prezzo per aumentare il ricavo? Per quale valore dell'elasticità?

CONCLUSIONI E PROSPETTIVE FUTURE

SINERGIA TRA LE PARTI



CONCLUSIONI E PROSPETTIVE FUTURE

SINERGIA TRA LE PARTI

Insegnanti & Studenti

nella **sperimentazione**
delle **attività**



Una fruttuosa collaborazione

Un panettiere vuole iniziare il primo di gennaio la sua attività di produzione e vendita di pane.

- Stima i suoi costi che sono rappresentati da:
 - materia prima (farina, lievito ed acqua) € 1 al KG
 - affitto del locale di € 1000 al mese
 - utilizzo di beni strumentali del valore di € 15.000 utilizzabili in 5 anni
- Individua la quantità di pane che gli consente di conseguire un pareggio dei costi e ricavi, sapendo che il prezzo di vendita è di 5 € /Kg in un anno.
- Quale sarebbe il suo profitto se producesse e vendesse in un anno 9000Kg di pane?
- Conviene al panettiere accettare una unica commessa di Kg 20.000 in un anno ad un prezzo di vendita al KG di € 3? Quale sarebbe il suo utile /perdita? Qual è la quantità che gli consente di pareggiare costi e ricavi se vendesse ad € 3 al Kg

Una fruttuosa collaborazione



...e iniziare il primo di gennaio la sua attività di
... pane.
... sono rappresentati da:

Grazie

utilizzabili

- Individuare i costi e i ricavi, sapendo che il prezzo di vendita è di 5 € /Kg in un anno.
- Quale sarebbe il suo profitto se producesse e vendesse in un anno 9000Kg di pane?
- Conviene al panettiere accettare una unica commessa di Kg 20.000 in un anno ad un prezzo di vendita al KG di € 3? Quale sarebbe il suo utile /perdita? Qual è la quantità che gli consente di pareggiare costi e ricavi se vendesse ad € 3 al Kg